Числовые последовательности

Понятие последовательности. Ограниченные и неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Определение 1. *Если любому натуральному числу n поставить в соответствие вещественное число x_n, то полученное (счетное) множество чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ будет называться* **числовой последовательностью** *и обозначаться $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ или $\{x_n\}$.*

В дальнейшем будем опускать термин «числовая», везде понимая под последовательностью (если не оговорено иное) последовательность вещественных чисел.

Определение 2. *Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*
Последовательность $\{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots\}$ называется **суммой** *$\{x_n\}$ и $\{y_n\}$; последовательность $\{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n, \dots\}$ — их* **разностью**; *последовательность $\{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n, \dots\}$ —* **произведением**; *последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\dfrac{x_1}{y_1}, \dots, \dfrac{x_n}{y_n}, \dots\right\}$ —* **частным** *(если $y_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$).*

Определение 3. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$* **ограничена сверху (снизу)**, *если существует такое вещественное число M (m), что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$. Числа M и m называются в этом случае* **верхней и нижней гранями последовательности** *x_n соответственно. Последовательность $\{x_n\}$ называется* **ограниченной**, *если существует вещественное число A такое, что неравенство $|x_n| \leqslant A$ выполняется для всех номеров $n \in \mathbb{N}$.*

Заметим, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена и сверху, и снизу. Действительно, пусть существуют числа M, m такие, что $m \leqslant x_n \leqslant M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда положим $A = \max\{|m|, |M|\}$. Наоборот, если $|x_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то можно взять $m = -A$, $M = A$.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **неограниченной**, *если для любого вещественного положительного числа A найдется натуральный номер N такой, что выполняется неравенство $|x_N| > A$.*

Последнее определение означает в точности, что последовательность называется неограниченной тогда и только тогда, когда она не является ограниченной.

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **бесконечно большой**, *если для любого положительного вещественного числа A найдется такой натуральный номер N (зависящий от A), что для любого натурального n, $n \geqslant N$, будет выполнено: $|x_n| > A$.*

Замечание 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая, то она, очевидно, является неограниченной. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, последовательность $\{x_n\} = \{0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots\}$ — неограниченная, но не бесконечно большая.*

Определение 6. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **бесконечно малой**, *если для любого положительного вещественного числа ε найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех натуральных чисел $n \geqslant N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$.*

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *— бесконечно малые последовательности. Тогда последовательность* $\{a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n\}$*, где* a*,* b *— произвольные вещественные числа, также является бесконечно малой.*

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то существует такое натуральное число N_1, зависящее от ε, что для любого натурального n, $n \geqslant N_1$, выполнено: $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$ (если $a \neq 0$). Аналогично $\exists\ N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ (при $b \neq 0$) $\forall n \geqslant N_2$.

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого натурального n, начиная с номера N, будет выполнено: $|a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n| \leqslant |a| \cdot |\alpha_n| + |b| \cdot |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Это означает, по определению, что последовательность $\{a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n\}$ является бесконечно малой. □

Следствие. *Линейная комбинация любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 2. *Пусть* $\{\alpha_n\}$ *— бесконечно малая последовательность,* $\{x_n\}$ *— ограниченная последовательность. Тогда последовательность* $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ *также является бесконечно малой.*

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует положительное число A такое, что $|x_n| \leqslant A\ \forall n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то существует такое натуральное число N, зависящее от ε, что для любого натурального n, $n \geqslant N$, выполнено: $|\alpha_n| < \varepsilon/A$.

Значит, для любого натурального n, начиная с номера N, будет выполнено: $|\alpha_n \cdot x_n| < A \cdot (\varepsilon/A) = \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ является бесконечно малой. □

Теорема 3. *Любая бесконечно малая последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Возьмем в определении бесконечно малой последовательности $\varepsilon = 1$. Тогда найдется такое натуральное число N, что для любого n, $n \geqslant N$, будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < 1$. Положим по определению $A = \max\{1, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда для любого натурального числа n справедлива оценка $|\alpha_n| \leqslant A$, то есть последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена. □

Следствие. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 4. *Пусть* $\{\alpha_n\}$ *— бесконечно малая последовательность. Если при этом* $\alpha_n = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$,[1] *то* $c = 0$.

[1]такие последовательности называют *стационарными*

Доказательство. Предположим противное: $c \neq 0$. Тогда обозначим $\varepsilon = \dfrac{|c|}{2} > 0$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено: $|\alpha_n| < \varepsilon$. Но последнее неравенство означает в точности, что $|c| < \dfrac{|c|}{2}$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и $c = 0$. $\square$

Теорема 5. *1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда, начиная с некоторого номера n, определено частное $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$, которое является бесконечно малой последовательностью.*

2) Если последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда существует натуральное число N_1 такое, что для любого $n \geqslant N_1$ выполнено: $|x_n| > 1$. Значит, начиная с номера N_1, определено частное $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то существует натуральное число $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такое, что $N_2 \geqslant N_1$ и $|x_n| > 1/\varepsilon\ \forall n \geqslant N_2$. Значит, начиная с номера N_2, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, то есть последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

2) Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n. Выберем произвольное положительное число A. Тогда найдется натуральный номер $N = N(A)$ такой, что $|\alpha_n| < \dfrac{1}{A}$ для любого $n \geqslant N$. Это означает, что, начиная с номера N, верно неравенство $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > A$, то есть последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой. $\square$

Упражнение 1. *Покажите, что произведение бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей может являться: а) бесконечно большой последовательностью; б) бесконечно малой последовательностью; в) ограниченной, но не бесконечно малой последовательностью; г) неограниченной, но не бесконечно большой последовательностью.*

Сходящиеся последовательности и их свойства

Дадим три эквивалентных определения сходящейся последовательности.

Определение 7. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если найдется вещественное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a называется в этом случае **пределом** последовательности $\{x_n\}$. Если последовательность не является сходящейся, то говорят, что она **расходится**.*

Определение 8. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **сходящейся**, *если найдется вещественное число a такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ будет существовать натуральный номер N, зависящий от ε, удовлетворяющий условию: $|x_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N$.*

Перепишем последнее неравенство в виде: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда получим, что последовательность сходится, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, удовлетворяющий условию: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \ \forall n \geqslant N$.

Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ будем называть $\varepsilon-$**окрестностью** точки a и обозначать $B_\varepsilon(a)$.

Определение 9. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **сходящейся**, *если найдется вещественное число a такое, что в любой $\varepsilon-$окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего от ε).*

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$.

Замечание 2. *Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Тогда $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Значит, для любого натурального n можем записать: $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность (специальное представление для элементов сходящейся последовательности).*

Определение 10. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$* **стремится к $+\infty$ (стремится к $-\infty$)** *при $n \to +\infty$, если для любого вещественного $A > 0$ найдется номер N, зависящий от A, такой, что $x_n > A$ $(x_n < -A)$ $\forall n \geqslant N$.*

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty)$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ $(x_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty)$.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ **стремится к бесконечности** *при $n \to +\infty$, если для любого вещественного $A > 0$ найдется номер N, зависящий от A, такой, что $|x_n| > A \ \forall n \geqslant N$ (то есть если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой).*

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \infty$.

Теорема 6. *Сходящаяся последовательность имеет один и только один предел.*

Доказательство. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей можем написать: $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $\alpha_n - \beta_n = a - b$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Но $\{\alpha_n - \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность (теорема 1), а значит, $a - b = 0$ (теорема 4). Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. □

Теорема 7. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Тогда существует натуральное число N такое, что $|x_n - a| < 1 \ \forall n \geqslant N$ (положили $\varepsilon = 1$ в определении 8). Обозначим $A = \max\{|a| + 1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$. Получим, что $|x_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Замечание 3. *Утверждение, обратное к утверждению теоремы 7, вообще говоря, неверно. Рассмотрим последовательность* $\{x_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$. *Она, очевидно, ограничена, но не является сходящейся. Действительно, пусть это не так и существует вещественное число* a *такое, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. *Тогда последовательности* $\{x_n - a\}$ *и* $\{x_{n+1} - a\}$ *являются бесконечно малыми. Значит, бесконечно малой является и их разность* $\{x_n - x_{n+1}\}$. *Но* $|x_n - x_{n+1}| = 2$ *для любого натурального* n. *Мы пришли к противоречию. Следовательно, последовательность* $\{x_n\}$ *расходится.*

Следующие три теоремы посвящены арифметическим операциям над сходящимися последовательностями.

Теорема 8. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. *Тогда существует предел суммы и разности этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n$. Так как $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то, согласно определению 7, получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$. □

Теорема 9. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. *Тогда существует предел произведения этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $(x_n \cdot y_n) - a \cdot b = a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$. Так как $\{a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность (как сумма трех бесконечно малых), то, согласно определению 7, получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$. □

Лемма 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда, начиная с некоторого номера* N, *определена последовательность* $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$, *которая является ограниченной.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Тогда существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geqslant N$ имеем: $|y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\dfrac{|b|}{2} < y_n - b < \dfrac{|b|}{2} \Leftrightarrow b - \dfrac{|b|}{2} < y_n < b + \dfrac{|b|}{2}$. Значит, $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$, то есть $y_n \neq 0$ и $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| < \dfrac{2}{|b|}$ для любого $n \geqslant N$. Следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ определена и ограничена при всех $n \geqslant N$. □

Теорема 10. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда существует предел частного этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b} = \dfrac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{y_n \cdot b} = \dfrac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)$. Согласно лемме, последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена; последовательность $\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ — бесконечно малая как разность двух бесконечно малых. Значит, и последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ является бесконечно малой (как произведение бесконечно малой и ограниченной). Получили, что $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ бесконечно мала, то есть что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$. □

Докажем несколько утверждений, связанных с предельным переходом в неравенствах для последовательностей.

Теорема 11. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *и последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что* $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$ *при всех* $n \geqslant N$ *для некоторых* $b \in \mathbb{R}$ *и* $N \in \mathbb{N}$. *Тогда выполнено предельное неравенство* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$.

Доказательство. Предположим, что $x_n \geqslant b$ при всех $n \geqslant N$, но $a < b$. Обозначим $\varepsilon = b - a > 0$. Тогда найдется такое натуральное число $N_1 = N_1(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant N_1$. Пусть $N_2 = \max\{N, N_1\}$. Получаем, что для любого $n \geqslant N_2$ выполняется цепочка неравенств

$$|x_n - a| < b - a \Leftrightarrow a - b < x_n - a < b - a \Leftrightarrow 2a - b < x_n < b.$$

Но по условию теоремы $x_n \geqslant b$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и $a \geqslant b$. □

Замечание 4. *Из того, что* $x_n > b$ *при всех натуральных* n, *не следует, вообще говоря, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n > b$ *(а лишь* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geqslant b$*). Например,* $1 + \dfrac{1}{n} > 1$, *но* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Следствие 1. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — *сходящиеся последовательности и существует натуральный номер* N *такой, что* $x_n \leqslant y_n$ $\forall n \geqslant N$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Доказательство. Так как $x_n \leqslant y_n$, то $(y_n - x_n) \geqslant 0$ $\forall n \geqslant N$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) \geqslant 0$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. □

Следствие 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. *Если для любого натурального* n *верно, что* $x_n \in [b, c]$, *то* $a \in [b, c]$.

Теорема 12. (Принцип двусторонней ограниченности.) *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. *Если последовательность* $\{z_n\}$ *такова, что для всех натуральных* n, *начиная с некоторого номера* N, *выполнено двойное неравенство* $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, *то* $\{z_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $x_n - a \leqslant z_n - a \leqslant y_n - a$ при всех $n \geqslant N$. Значит, начиная с номера N, выполнено: $|z_n - a| \leqslant \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\}$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется натуральное $N_1 = N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant N_1$ (так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$). Аналогично найдется натуральное $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такое, что $|y_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant N_2$. Обозначим $N_3 = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_3$ получим: $|z_n - a| < \varepsilon$. Это и означает, что последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. □

Монотонные последовательности

Определение 11. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* ***неубывающей (невозрастающей)****, если неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ ($x_n \geqslant x_{n+1}$) выполнено для любого натурального номера n. Если последовательность является неубывающей или невозрастающей, то она называется* ***монотонной****.*

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)****, если для любого натурального номера n выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$).*

Теорема 13. *Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху (не возрастает и ограничена снизу), то она сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху и $x_n \leqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда существует вещественное число $\overline{x} = \sup\{x_n\}$. Значит, $x_n \leqslant \overline{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $x_N > \overline{x} - \varepsilon$. В силу монотонности $\{x_n\}$ получаем, что для любого $n \geqslant N$ верно: $\overline{x} - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \overline{x} < \overline{x} + \varepsilon$. Но это означает в точности, что $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не возрастает и ограничена снизу, рассматривается аналогично. □

Определение 12. *Бесконечная последовательность сегментов $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots\}$ называется* ***системой стягивающихся сегментов****, если выполнены два условия:*

1) $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_n \geqslant b_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (то есть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$);

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Следствие из теоремы 13. *Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ — система стягивающихся сегментов. Тогда существует единственная точка $c \in \mathbb{R}$ такая, что $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (то есть система стягивающихся сегментов имеет единственную общую точку).*

Доказательство. 1) Докажем существование. Так как последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая и ограниченная сверху (например, $a_n \leqslant b_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$), то она имеет предел. Последовательность $\{b_n\}$ является невозрастающей и ограничена снизу (например, числом a_1), следовательно, она также сходится. Поскольку по условию $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$. Очевидно, что $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (в силу монотонности обеих последовательностей).

2) Проверим единственность. Пусть числа $c, d \in \mathbb{R}$ таковы, что $c \in [a_n, b_n]$, $d \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $c < d$. Тогда неравенство $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$ выполнено

для всех натуральных n. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) \geqslant d - c > 0$. Это противоречит условию, следовательно, наше предположение неверно и $c \geqslant d$. Но совершенно аналогичными рассуждениями можно получить, что $d \geqslant c$. Значит, $c = d$. $\square$

Примеры монотонных последовательностей.

1. Число e.

Лемма 2. (Бином Ньютона). *Пусть a, b — произвольные вещественные числа. Тогда для любого натурального n справедливо равенство*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n,$$

*где $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ — **биномиальные коэффициенты**, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (читается: n—**факториал**); $0! = 1$ по определению.*

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции.

1) (база индукции). При $n = 1$ получаем: $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$ — верно.

2) (предположение индукции). Предположим, что утверждение справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

3) (шаг индукции). Проверим справедливость формулы при $n+1$. Для этого докажем сначала некоторые свойства биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} =$$
$$+\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \quad k < n.$$

Теперь можем записать следующую цепочку равенств:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n)(a+b) =$$
$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n a b^n + C_n^n b^{n+1} =$$
$$= C_n^0 a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^n b + (C_n^1 + C_n^2) a^{n-1} b^2 + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a b^n + C_n^n b^{n+1} =$$
$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

(при переходе к последней строке мы воспользовались доказанными выше свойствами биномиальных коэффициентов). Шаг индукции завершен, лемма полностью доказана. $\square$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и докажем, что она является монотонной и ограниченной.

Проверим сначала, что $\{x_n\}$ возрастает. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n!}{(n-1)!1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{(n-n)!n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n^n}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим, что последнее слагаемое в выражении для x_{n+1} положительно, поэтому при его отбрасывании все выражение уменьшается. Каждое же из n первых слагаемых в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n, поскольку $1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}$ при всех натуральных значениях $k < n$. Значит, $x_n < x_{n+1}$.

С другой стороны, так как $1-\frac{k}{n} < 1$, то

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

(здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством $k! \geqslant 2^{k-1}\ \forall k \geqslant 2$).

Таким образом, мы показали, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3. Значит, она имеет предел. Предел этой последовательности — так называемое число e — одна из фундаментальных математических констант. По определению $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Из наших рассуждений видно, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in [2,3]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, следовательно, $2 \leqslant e \leqslant 3$. На самом деле число e является иррациональным; его можно вычислить с любой точностью. С точностью до 15-го знака после запятой $e = 2,718281828459045\ldots$.

Пример 1. *Докажем еще одну формулу для вычисления числа e:*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{1}$$

Обозначим $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. *Мы уже знаем, что* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Покажем, что* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0$. *Из неравенства Бернулли* [2] *следует, что*

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1 - \frac{1+2+\dots(k-1)}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Отсюда

$$0 < a_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2n} =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} \leqslant \frac{1}{2n}\left(1+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^{k-3}}\right) \leqslant \frac{3}{2n}.$$

Так как $\frac{3}{2n} \to 0$ *при* $n\to+\infty$, *то* $\left(a_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \to 0$, *то есть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

Формула (1) *позволяет вычислять число* e *с любой степенью точности. Действительно, для любого натурального* n *справедлива оценка*

$$r_n = e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right) = \frac{2}{(n+1)!} \qquad (2)$$

С помощью последнего неравенства легко показать, что число e *является иррациональным. В самом деле, пусть это не так и* $e = \frac{p}{q}$, *где* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *(причем* $q \geqslant 2$, *так как из формул* (1), (2) *следует, очевидно, что* $2 < e < 3$, *т.е. число* e *не является целым). Тогда* $q!e = q!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{q!}\right) + q!r_q$, *значит,* $q!r_q \in \mathbb{Z}$, *но из* (2) *вытекает, что* $0 < q!r_q < \frac{2q!}{(q+1)!} = \frac{2}{q+1} \leqslant \frac{2}{3} < 1$. *Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, то есть число* e *не является рациональным.*

2. Последовательности, заданные рекуррентно.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (способ задания последовательности, при котором каждый следующий член вычисляется через предыдущий, называется **рекуррентным**, от латинского recurrens — возвращающийся). Здесь a — любое положительное число, $x_1 > 0$ выбирается произвольно. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не возрастает и ограничена снизу. Действительно,

[2] $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$, если $x_1, \dots x_n$ — вещественные числа одного знака, большие -1

$x_1 > 0$, следовательно, $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right) > 0$. Аналогично $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Более того, $x_n = \dfrac{\sqrt{a}}{2}\left(\dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right) \geqslant \sqrt{a}$ при $n \geqslant 2$, так как выражение $\dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \geqslant 2$ как сумма двух положительных взаимно обратных величин.

Проверим теперь, что $\{x_n\}$ не возрастает: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$, значит, $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех натуральных $n \geqslant 2$ (мы воспользовались доказанной выше оценкой $x_n \geqslant \sqrt{a}\ \forall n \geqslant 2$).

Мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, следовательно, существует $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Для того, чтобы найти x, перейдем к пределу в обеих частях рекуррентного соотношения: $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$. Отсюда получаем уравнение относительно x: $2x^2 = x^2 + 2$. Поскольку $x \geqslant \sqrt{a} > 0$, то $x = \sqrt{a}$.

Предельные точки последовательностей

Определение 13. *Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ — натуральные числа, такие, что $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$. Тогда последовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{k_n}\}$.*

Утверждение 1. *Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, то любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также сходится к a.*

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Пусть $\{x_{k_n}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$. Так как $k_N \geqslant N$, то можем утверждать, что при всех $n \geqslant N$: $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = a$. □

Утверждение 2. *Если все подпоследовательности некоторой последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то они сходятся к одному и тому же числу a, и, в частности, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ является по определению собственной подпоследовательностью, то по условию существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Обозначим этот предел через a. Тогда, согласно предыдущему утверждению, любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также будет сходиться к a. □

Определение 14. *Точка $x \in \mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой (частичным пределом)*** *последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности этой точки содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.*

Определение 15. *Точка $x \in \mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой (частичным пределом)*** *последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$.*

Утверждение 3. *Определения 14 и 15 эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что из определения 14 следует 15. Так как в любой окрестности точки x лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то найдется натуральный номер k_1 такой, что $x_{k_1} \in (x-1, x+1)$. Далее, найдется такое натуральное число $k_2 > k_1$, что $x_{k_2} \in (x-1/2, x+1/2)$, и так далее. Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется натуральный номер $k_n > k_{n-1}$ такой, что $x_{k_n} \in (x-1/n, x+1/n)$. Получаем, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = [1/\varepsilon] + 1$ такое, что при всех $n \geqslant N$ выполнено: $|x_{k_n} - x| < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$.

Проверим теперь, что из определения 15 следует 14. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$. Тогда для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что $x_{k_n} \in B_\varepsilon(x)$ при всех $n \geqslant N$. Но это и означает, что в любой окрестности точки x будет содержаться бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Замечание 5. *Точка x называется* ***предельной точкой бесконечного множества*** *X, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много элементов множества X.*

Предельные точки последовательности и множества ее значений могут, вообще говоря, не совпадать. Например, последовательность $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ имеет две предельные точки: 1 и -1, в то время как множеством ее значений является конечное множество $\{-1, 1\}$, которое не имеет предельных точек.

Упражнение 2. *Проверьте, что следующее утверждение является эквивалентным определением предельной точки множества: точка x называется* ***предельной точкой бесконечного множества*** *X, если в любой ее окрестности содержится хотя бы один элемент множества X, отличный от x.*

Упражнение 3. *Приведите пример последовательности, имеющей бесконечно много предельных точек, и такой, что множество ее значений не имеет (конечных) предельных точек.*

Утверждение 4. *Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Тогда $\{x_n\}$ имеет ровно одну предельную точку, равную x.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, то x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ (определение 15). Других предельных точек у $\{x_n\}$ нет (утверждение 1). $\square$

Определение 16. *Наибольшая (наименьшая) из предельных точек последовательности $\{x_n\}$ называется ее* ***верхним (нижним) пределом*** *и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ ($\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$). Если множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$ не ограничено сверху (снизу), то говорят, что $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ($\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$).*

Теорема 14. *У всякой ограниченной последовательности существуют (конечные) верхний и нижний пределы и, в частности, хотя бы одна предельная точка.*

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существуют вещественные числа m и M такие, что $m \leqslant x_n \leqslant M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Обозначим $A = \{x \in \mathbb{R} |$ *существует не более чем конечное число номеров* $k \in \mathbb{N}$ *таких, что* $x_k > x\}$. Множество A не пусто (так как $M \in A$) и ограничено снизу (например, числом $m - 1$). Значит, существует число $\bar{x} = \inf A$.

Докажем, что $\bar{x} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$. Выберем произвольное вещественное $\varepsilon > 0$. Так как $\bar{x} = \inf A$, то: 1) $\bar{x} - \varepsilon \notin A$, следовательно, правее точки $\bar{x} - \varepsilon$ на числовой оси лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$; 2) существует точка $x' \in A$ такая, что $\bar{x} \leqslant x' < \bar{x}+\varepsilon$, значит, правее x' (тем более, правее $\bar{x}+\varepsilon$) на числовой оси лежит не более чем конечное число элементов $\{x_n\}$. Получаем, что в интервале $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Это означает по определению, что точка $\bar{x}$ является предельной точкой $\{x_n\}$.

Покажем, что $\bar{x}$ — наибольшая из предельных точек последовательности $\{x_n\}$. Пусть $x > \bar{x}$. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{x - \bar{x}}{2} > 0$ (Тогда $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(\bar{x}) = \emptyset$). Так как окрестность $B_\varepsilon(x)$ целиком лежит правее точки $\bar{x} + \varepsilon$, то в ней содержится не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, точка x не является предельной точкой $\{x_n\}$. Мы показали, что $\bar{x} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$. Аналогично проверяется существование нижнего предела последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 1. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена,* $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ *такой, что* $x_n \in (\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ *при всех* $n \geqslant N$.

Доказательство. Следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ правее $\overline{x} + \varepsilon$ (левее $\underline{x} - \varepsilon$) на числовой оси лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 2. (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Следствие 3. *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда она ограничена (свойство сходящихся последовательностей) и имеет единственную предельную точку (утверждение 4).

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = x$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ при всех $n \geqslant N$ (следствие 1). Но это и означает, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. □

Утверждение 5. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что ее можно разбить на конечное число* M *непересекающихся подпоследовательностей, каждая из которых имеет предел:* $a_1, \ldots, a_M$. *Тогда числа* $a_1, \ldots, a_M$ *являются предельными точками последовательности* $\{x_n\}$, *и других предельных точек она не имеет.*

Доказательство. Пусть наша последовательность разбита на подпоследовательности $\{x_{k_{n_1}}\}$, ..., $\{x_{k_{n_M}}\}$ такие, что $\lim\limits_{n_1\to+\infty} x_{k_{n_1}} = a_1$, ... , $\lim\limits_{n_M\to+\infty} x_{k_{n_M}} = a_M$, причем эти подпоследовательности не имеют общих точек, а их объединение дает всю последовательность $\{x_n\}$. Тогда, по доказанному выше, числа $a_1, \ldots, a_M$ являются предельными точками последовательности $\{x_n\}$. Пусть $a \neq a_i, i = 1, \ldots, M$. Обозначим $\varepsilon_1 = (|a - a_1|)/2 > 0$, ..., $\varepsilon_M = (|a - a_M|)/2 > 0$; $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_M\} > 0$. Поскольку число a_1 является пределом подпоследовательности $\{x_{k_{n_1}}\}$, то все элементы этой подпоследовательности, за исключением конечного числа, принадлежат множеству $B_{\varepsilon_1}(a_1)$. И так далее, наконец, все элементы подпоследовательности $\{x_{k_{n_M}}\}$, за исключением конечного числа, принадлежат множеству $B_{\varepsilon_M}(a_M)$. Значит, в $\varepsilon-$окрестности точки a может лежать лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ (так как по построению эта окрестность не пересекается ни с одним из множеств $B_{\varepsilon_1}(a_1), \ldots, B_{\varepsilon_M}(a_M)$), то есть точка a не является предельной точкой $\{x_n\}$. $\square$

Замечание 6. *Данное утверждение нельзя, вообще говоря, перенести на случай бесконечного числа подпоследовательностей. Например, рассмотрим последовательность* $\{x_n\} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 1, \ldots\right\}$. *Ее можно разбить на счетное число непересекающихся стационарных подпоследовательностей:* $\{x_{k_1}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$, $\{x_{k_2}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$,..., $\{x_{k_n}\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, ... *каждая из которых имеет предел:* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$. *Однако исходная последовательность имеет еще одну предельную точку, отличную от перечисленных. Действительно, из последовательности* $\{x_n\}$ *можно также выделить подпоследовательность* $\{x'_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, *имеющую своим пределом точку* 0.

Пример 2. *Найдем точные верхнюю и нижнюю грани, а также верхний и нижний пределы последовательности* $\{x_n\} = \left\{2, -2, 1 + \frac{1}{2}, -1 - \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, -1 - \frac{1}{n}, \ldots\right\}$: $\inf\{x_n\} = -2$, $\sup\{x_n\} = 2$ *(очевидно);* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = -1$ *(так как последовательность* $\{x_n\}$ *разбивается на две подпоследовательности:* $\{x_1, x_3, x_5, \ldots\}$ *и* $\{x_2, x_4, x_6, \ldots\}$. *Первая из этих подпоследовательностей сходится к* 1, *вторая — к* -1*).*

Упражнение 4. *Докажите, что для любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$ *имеет место цепочка неравенств:* $\inf\{x_n\} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n \leqslant \sup\{x_n\}$.

Критерий Коши сходимости последовательности

Определение 17. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***фундаментальной*** *или* ***последовательностью Коши****, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n \geqslant N$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *выполнено:* $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *фундаментальна. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется натуральный номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что* $x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)\ \forall n \geqslant N$.

Доказательство. Положим в определении фундаментальной последовательности $n = N$. Тогда получим, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено: $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$. Это означает, что для любого $n \geqslant N$: $|x_n - x_N| < \varepsilon$, то есть $x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$. □

Лемма 4. *Любая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда положим в утверждении предыдущей леммы $\varepsilon = 1$ и получим, что $\exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $x_n \in (x_N - 1, x_N + 1)$ при всех $n \geqslant N$. Обозначим $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. Тогда $|x_n| \leqslant A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Теорема 15. (Критерий Коши сходимости последовательности). *Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное $N = N(\varepsilon)$, что неравенство $|x_n - x| < \varepsilon/2$ будет выполнено для любого $n \geqslant N$. Тем более, для любого $n \geqslant N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$. Значит, для любого $n \geqslant N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x + x - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда она ограничена. Значит, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Обозначим $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$ и докажем, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$, то $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2$ $\forall n \geqslant N_1$. С другой стороны, поскольку $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon/2$ будет выполняться $\forall n \geqslant N_2$ и $\forall p \in \mathbb{N}$. Положим теперь $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n \geqslant N$ имеем:

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \leqslant |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(так как $k_n \geqslant n$, то можно считать, что $x_{k_n} = x_{n+p}$, где $p = 0$ или $p \in \mathbb{N}$). Получаем по определению, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. □

Следствие. (Критерий Коши расходимости последовательности). *Последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда найдется такое вещественно число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального номера N найдутся натуральное число $n \geqslant N$ и натуральное число p, для которых будет выполняться неравенство: $|x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon$.*